6/11/18

Συνέχεια...

Αποδ. προτ. 2: Ξέρουμε (από Πρόταση) ότι:

(⇒) $\bar{U} = U \cup U'$. Συνεπώς αν $\bar{x} \in U$, επιλέγουμε $\bar{x}_\nu = \bar{x}$, $\nu \in \mathbb{N}$

αν $\bar{x} \notin U \Rightarrow \bar{x} \in U' \xRightarrow{\text{Προτ. 1}} \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$

$\bar{x} \in U$

(⇐) Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$ και $(\bar{x}_\nu) \subset U$, αν $\exists \nu \in \mathbb{N}$: $\bar{x}_\nu = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in U \subset \bar{U}$

αν $\underbrace{\nexists \nu \in \mathbb{N} : \bar{x}_\nu = \bar{x}}_{\Leftrightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \bar{x}_\nu \neq \bar{x}} \Rightarrow (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$ Πρόταση 1

Πρόταση 3: $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall \bar{x}_\nu \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$: [Δηλ. U κλειστό αν και μόνο αν: Αν κάποια ακολουθία (με όρους συγκλίνει σε κάποιο σημείο στο U) του $\mathbb{R}^n$, τότε αυτό το σημείο ανήκει στο U]

Απόδειξη: (⇒) Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Από την Προτ. 2 και αφού U κλειστό $\Leftrightarrow U = \bar{U}$ προκύπτει $\bar{x} \in \bar{U} = U$

(⇐) ΘΔΟ $\bar{U} \subset U$ [$\xRightarrow{U \subset \bar{U}} U = \bar{U} \Leftrightarrow U$ κλειστό]

Έστω $\bar{x} \in \bar{U} \Rightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x} \xRightarrow[\text{υπόθεση}]{\text{από}} \bar{x} \in U$ ◪

Αποδ. προτ. 4: (⇒) Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \Rightarrow \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$

$\Rightarrow \bar{x} \in U$

U φραγμένο με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ + B.W.

$\bar{x}_{k_\nu} \subset$ ~~( )~~ U με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και U κλειστό + Προτ. 3

($\Leftarrow$) Έστω ότι το $\mathcal{U}$ δεν είναι φραγμένο $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} \ \exists \bar{x}_\nu \in \mathcal{U}$ με $\|\bar{x}_\nu\| \geq \nu$

Συνεπώς $\forall$ υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ [δηλ. ισχύει $k_\nu \in \mathbb{N}$ με $k_\nu \geq \nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και k_ν γνησίως αύξουσα] τότε έχουμε:

$$\|\bar{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu \geq \nu \to \infty$$

($k_{\nu+1} > k_\nu$)

δηλ. η $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι φραγμένη δηλ. δεν συγκλίνει άτοπο προς την υπόθεση στα δεξιά της Πρoτ. 4

Εξήγηση: έχουμε (δηλ. γνωρίζουμε) ότι $\forall (\bar{x}_\nu) \subset \mathcal{U}$ $\exists (\bar{x}_{k_\nu})$ συγκλίνουσα

ΝΔΟ $\mathcal{U}$ φραγμένο

Υποθέτω ότι το $\mathcal{U}$ δεν είναι φραγμένο και αποδεικνύω ότι τότε δεν θα ισχύει η υπόθεση μου [αλλιώς: A (υπόθεση) $\Rightarrow$ B (συμπέρασμα)
$\Leftrightarrow$ $\neg$B (δεν ισχύει συμπέρασμα) $\Rightarrow$ $\neg$A (δεν (ισοδυναμεί) ισχύει η υπόθεση)

Δείξαμε ότι το $\mathcal{U}$ είναι φραγμένο. ΝΔΟ $\mathcal{U}$ κλειστό. Άρα σύμφωνα με την Προτ. 3, ΘΝΔΟ $\forall (\bar{x}_\nu) \subset \mathcal{U}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\bar{x} \in \mathcal{U}$.
Έστω ότι έχω $(\bar{x}_\nu) \subset \mathcal{U}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \Rightarrow \forall (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$
$\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists (\bar{x}_{k_\nu})$ με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathcal{U}$
+ υποθ. μοναδ. ορίου.

Γενικά, περί συναρτήσεων με περισσότερες ανεξ. και μη- εξαρτ. μεταβλητές

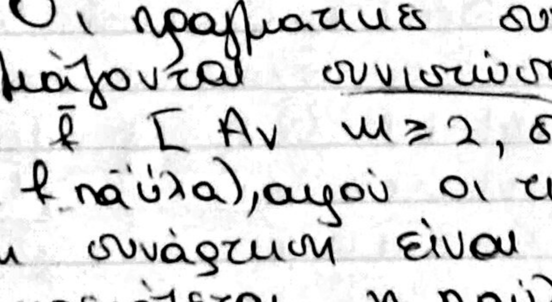
→ Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ μια απεικόνιση $U \ni \bar{x} \mapsto \bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$ συμβ ~~…~~ : $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι μια τέτοια συνάρτ., με περισσότερες (ανεξ.) μεταβλητές, αν $n \geq 2$
Ειδικότερα, $U \ni \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$

ονομάζεται συνάρτηση n-πραγματικών (και θα πιο πάνω, αν $n \geq 2$ και συνάρτ. περισ. μεταβλ.).
Αν $m \geq 2$, η συνάρτ. ονομάζεται διανυσματική (δηλ. έχει τιμές $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$, διανύσματα)
Αν $m = 1$ η συνάρτηση λέγεται πραγματική

→ Οι πραγματικές συναρτήσεις $U \ni \bar{x} \mapsto f_i(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ ονομάζονται συνιστώσες συναρτήσεις $i = 1, \dots, m$ της $\bar{f}$ [Αν $m \geq 2$, συμβολίζουμε τη συνάρτηση με $\bar{f}$ (f παύλα), αφού οι τιμές της $f(\bar{x})$ είναι διανύσματα
Αν η συνάρτηση είναι πραγματική δηλ. $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, δε χρειάζεται η παύλα (συμβάσεις)

→ Το $U \subset \mathbb{R}^n$ της $f : U \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται πεδίο ορισμού

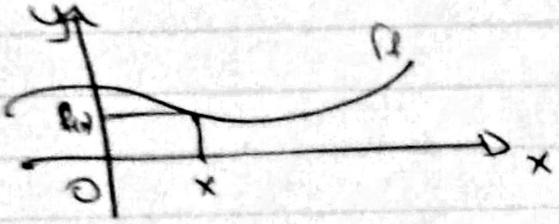
→ Το $\bar{f}(U) := \{ \bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m : \bar{x} \in U \}$ εικόνα της $\bar{f}$



Στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε την τιμή (ύψος σε αυτό το σημείο)
$f(x_0, y_0) = 100 \in \mathbb{R}$

[Διάσταση (του χώρου στον οποίο βρίσκεται το) γράφημα της f = διάσταση (..) του Π.Ο. + διάστημα πεδίο τιμών]

<u>Π.Χ.</u> $n=m=1: f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow \Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$



<u>Αφού</u> [το Π.Ο. $U \subset \mathbb{R}^n$ και] $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ μπορούμε <u>να ορίσουμε</u> τα εξής. Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ τότε:

(α) $(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})$ είναι η $\bar{f}+\bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$

(β) $(a \cdot \bar{f})(\bar{x}) = a(\bar{f}(\bar{x}))$ είναι η $a\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$
$a \in \mathbb{R}$

(γ) $(\bar{f} \cdot \bar{g})(\bar{x}) := (\bar{f}(\bar{x})) \cdot (\bar{g}(\bar{x}))$ ορίζει την
$\bar{f} \cdot \bar{g} : U \to \mathbb{R}$

Επίσης, έστω $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ και $V \subset \mathbb{R}^m$ με $\bar{f}(U) \subset V$ και $\bar{g} : V \to \mathbb{R}^k \Rightarrow \bar{g} \circ \bar{f} : U \to \mathbb{R}^k$ είναι η $(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^k$, η <u>σύνθεση των f και g</u>

<u>Αν</u> $f : U \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ (δηλ. f πραγμ. συνάρτ.)
<u>τότε</u> $(f \cdot g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})$ (<u>γινόμενο</u> των f, g)
$f \cdot g : U \to \mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$, αν $g(\bar{x}) \neq 0$ (<u>πηλίκο</u> των f, g)

$\frac{f}{g} : U \setminus \{\bar{x} \in U : g(\bar{x}) = 0\} \to \mathbb{R}$

Για διάφορα είδη συναρτήσεων με περισσότερες πραγμ. ανεξ. ή/και εξαρτ. μεταβλητές βλ την εισαγωγή στο μάθημα και τις σημειώσεις ΓΓ καθώς και σε κάθε ενότητα που θα τις εξετάσουμε

→ [Πραγματικές : $m=1$
→ Διανυσματικές: $m \geq 2$
→ Διανυσματικά πεδία $m=n \geq 2$
→ καμπύλες : $n=1$, $m \geq 2$
→ επιφάνειες: $n=2$, $m=3$
→ (υπερ) επιφάνειες: $n=m-1$, $m \geq 4$]]

→ Οι αναλυτικές ιδιότητες των $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ προκύπτουν / σχετίζονται με τις αναλ. ιδιότητες των συνιστωσών $f_i: U \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$ (δηλ. πραγμ. συναρτ.)

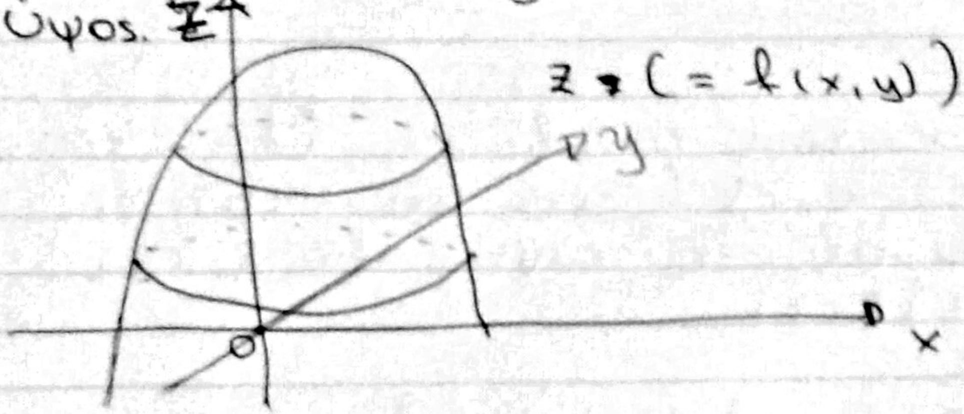
→ Για πραγμ. συναρτήσεις περισσοτέρων $\boxed{f: U \to \mathbb{R}}$, $\boxed{U \subset \mathbb{R}^n}$ υπάρχει η έννοια του συνόλου στάθμης (level set) $c \in \mathbb{R}$ της f

στάθμη

$L_f(c) := \{\bar{x} \in U : f(\bar{x}) = c\} \subset U \subset \mathbb{R}^n$ το οποίο

για $n=2$ ονομάζεται και καμπύλη στάθμης ενώ για $n=3$ και επιφάνεια στάθμης

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in \bar{B}((0,0),2)$, αναπαριστά γραφικά την επιφάνεια ενός βουνού, τότε οι καμπύλες στάθμης $c \in \mathbb{R}$ μου δίνουν τα σημεία του «χάρτη» $\mathbb{R}^2$ στα οποία η επιφάνεια του βουνού έχει το ίδιο ύψος.



$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2+y^2) = 4 - \|(x,y)\|^2 \in \mathbb{R}$$

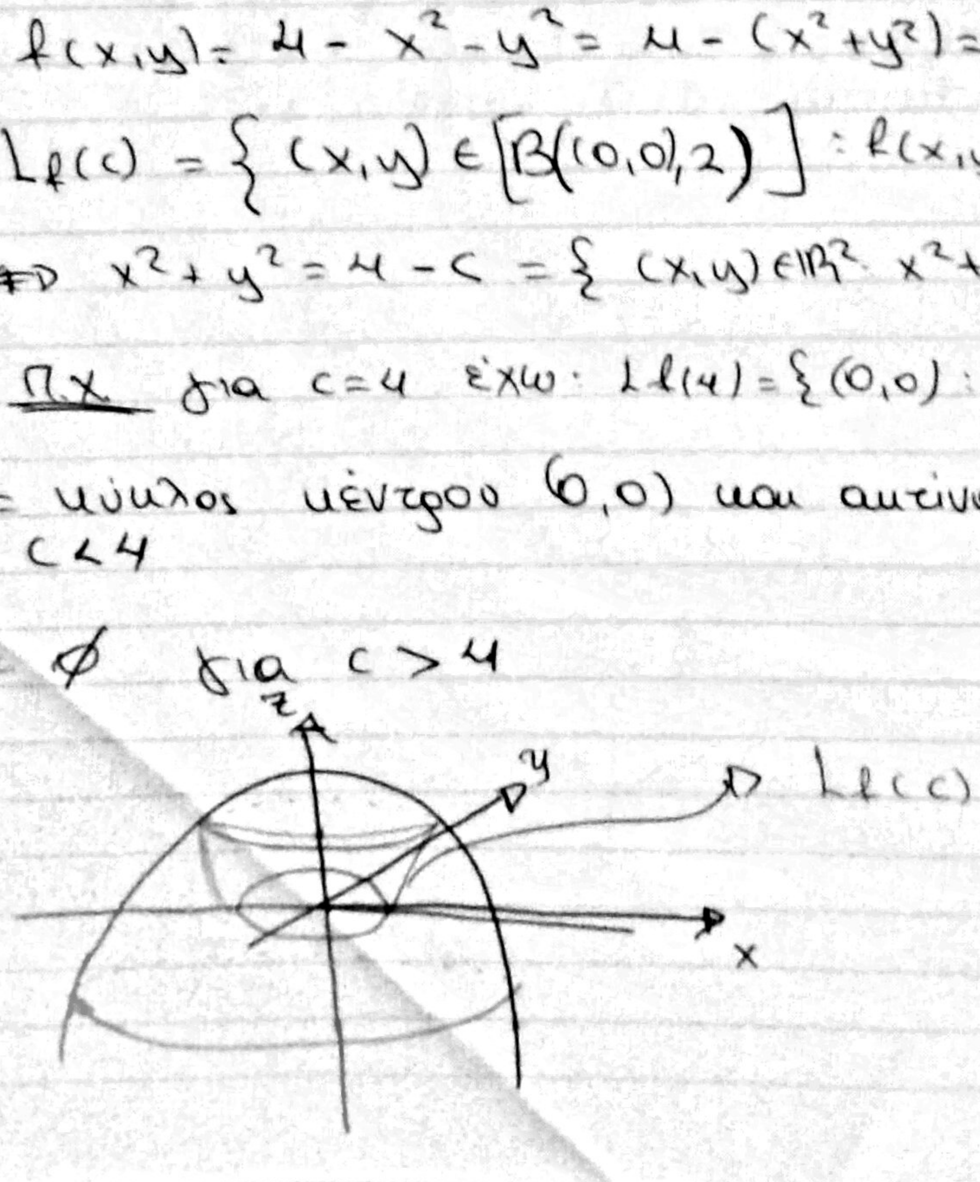
$$L_f(c) = \{ (x,y) \in [\bar{B}((0,0),2)] : f(x,y) = c = 4-(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 4-c = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4-c \} =$$

<u>Π.χ.</u> για $c=4$ έχω: $L_f(4) = \{(0,0) : c=4\}$

= κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{4-c}$ για $c<4$

$= \emptyset$ για $c>4$



Επιφάνεια του βουνού $= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = z \}$

$= \{ (x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = \Gamma_f$ όπου:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

Τα σημεία της επιφ. του βουνού, Γ_f, τα οποία έχουν $z = c \in (-\infty, 4]$ (ύψος του σημείου $(x,y,z) \in \Gamma_f$) είναι τα σημεία $(x,y,f(x,y))$, όπου $(x,y) \in L_f(c)$

Άρα λοιπόν το σύνολο $L_f(c) \times \{c\}$ είναι κύκλοι κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{4-c}$ οι οποίοι βρίσκονται στο επίπεδο $z = c$